SOLUCIÓN AL DESAFÍO 1

Vamos a plantear tres formas distintas de llegar a la solución (en realidad la segunda es solo una pequeña variante de la primera.

(a) Primera forma (mostrade en el periódico

Sea b el número de bolas blancas y n el número de bolas negras. Decir que la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color es igual a que sean de distinto color es lo mismo que decir que la probabilidad de que sean del mismo color es $1/2$. Esta probabilidad es

$$\frac{b}{b+n}\frac{b-1}{b+n-1}+\frac{n}{b+n}\frac{n-1}{b+n-1}$$

que corresponde a la suma de las probabilidad de que las dos bolas sean blancas o que las dos bolas sean negras. Queremos que esa probabilidad sea igual a $1/2$, lo que es equivalente, tras hacer algunos cálculos a

$$b^2+n^2-2bn=b+n. \tag{1}$$

Así, la solución serán aquéllos números naturales b y n que cumplan esta ecuación. Por ejemplo, si $n=1$ entonces $b=3$ y ésta es la solución con el menor número de bolas (junto con $b=1$ y $n=3$, claro está). Para encontrar la forma general de la solución tenemos que trabajar algo más. Reescribiendo la ecuación anterior, vemos que es equivalente a:

$$b^2-(2n+1)b+n^2-n=0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado en b como función de n, a:

$$b=\frac{2n+1\pm\sqrt{8n+1}}{2}$$

Como b ha de ser un número natural y $2n+1$ es impar, para que la ecuación se cumpla, ha de ocurrir que $\sqrt{8n+1}$ sea un número natural impar. Escribamos pues $8n+1 = (2k-1)^2$ para algún $k = 1, 2, \cdots$, lo que quiere decir que $n = k(k-1)/2$. Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos dos soluciones para b dependiendo del signo que precede a la raíz. La solución con el signo $+$ da lugar a $b = k(k+1)/2$. Como tanto $k(k+1)$ como $k(k-1)$ son números pares, para cualquier $k = 1, 2, \ldots$, tenemos que ésta es una solución del problema. El valor de b correspondiente al signo $-$ anterior a la raíz puede verse que es la solución simétrica a la anterior.

Por lo tanto, la solución general del problema es $b = k(k+1)/2$, $n = k(k-1)/2$ o $b = k(k-1)/2$, $n = k(k+1)/2$ para $k = 2, 3, \ldots$.

(b) Segunda forma

Esta segunda forma es una alternativa de resolver la ecuación (1) que aparece en (a). Como $b^2 + n^2 - 2bn = (b-n)^2$, la ecuación (1) es equivalente a

$$(b-n)^2 = b + n.$$

Así, nos damos cuenta de que el número de bolas blancas y negras no puede ser el mismo. Supongamos que el número de bolas blancas es mayor que el de negras, es decir, $b > n$. Llamemos $k = b - n$, que será un entero mayor que 0, y tendremos que $b + n = k^2$. Resolviendo el sistema, obtenemos $b = k(k+1)/2$, $n = k(k-1)/2$, válida para cualquier $k = 2, 3, \ldots$.

(c) Tercera forma

Finalmente, mostramos otra forma de resolver el problema que consiste en trabajar con el número de bolas blancas y con el totoal de bolas. Llamemos b =número de bolas blancas y t =número total de bolas. En ese caso, la probabilidad de que sean de distinto color

es
$$\frac{2b(t-b)}{t(t-1)}.$$
Como queremos que sea igual a $1/2$, deberá ocurrir que
$$4b^2 - 4bt + t^2 - t = 0$$
o, equivalentemente,
$$b = \frac{t \pm \sqrt{t}}{2}.$$
Tomaremos la solución con signo positivo, lo que indicará que el número de bolas blancas será mayor que el de negras (si tomamos el signo negativo nos saldrá la solución simétrica). Como el número b ha de ser entero, t deberá ser un cuadrado perfecto $t = k^2$. Si k es par t también lo será y el numerador será par; si k es impar t también lo será y el numerador también será par. Como al menos ha de haber 2 bolas, k ha de ser mayor que 1, y la solución será $t = k^2$, $b = k(k+1)/2$, para $k = 2, 3, \ldots$ que, por supuesto, coincide con las anteriores.